با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی هشتم
فصل نهم

عنوان فصل: دایره

از صفحه‌ی ۱۳۷ تا صفحه‌ی ۱۵۰ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل دایره آمده است.

مباحث فصل: خط و دایره، زاویه‌های مرکزی، زاویه‌های محاطی

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱ صفحه ۱۳۸ · فعالیت — دایره و وضعیت خط و دایره ۴

۲ صفحه ۱۳۹ · کار در کلاس — خط مماس و شعاع ۵

۳ صفحه ۱۳۹ · فعالیت — تا کردن دایره و وتر ۵

۴ صفحه ۱۴۰ · فعالیت — شعاع عمود بر مماس، یافتن قطر بشقاب و وتر ... ۵

۵ صفحه ۱۴۱ · کار در کلاس — زاویه‌ها و طول مماس ۶

۶ صفحه ۱۴۱ · تمرین — دو مماس از یک نقطه و عمق آب ... ۷

۷ صفحه ۱۴۲ · فعالیت — زاویه‌ی مرکزی و کمان ۷

۸ صفحه ۱۴۳ · کار در کلاس — اندازه‌ی کمان و زاویه‌ی مرکزی ... ۸

۹ صفحه ۱۴۳ · فعالیت — هشت‌ضلعی منتظم ۸

۱۰ صفحه ۱۴۴ · کار در کلاس — رسم پنج‌ضلعی منتظم و تقسیم دایره ... ۹

۱۱ صفحه ۱۴۵ · تمرین — کمان‌ها و زاویه‌های مرکزی ۱۰

۱۲ صفحه ۱۴۶ · فعالیت — زاویه‌ی محاطی ۱۱

۱۳ صفحه ۱۴۷ · کار در کلاس — زاویه‌ی محاطی در شکل‌ها ... ۱۱

۱۴ صفحه ۱۴۷ · فعالیت — زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان ... ۱۲

۱۵ صفحه ۱۴۸ · کار در کلاس — لوزی محاط در دایره ۱۲

۱۶ صفحه ۱۴۸ · تمرین — زاویه‌ها و کمان‌های مجهول ۱۳

۱۷ صفحه ۱۴۹ · تمرین — تقارن، چهارضلعی محاطی، چرخ ... ۱۳

۱۸ صفحه ۱۵۰ · تمرین ترکیبی — مرور فصل ۹ ..... ۱۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱ صفحه ۱۳۸ فعالیت

۱ــ پنج نقطه پیدا کنید که فاصله‌ی هر کدام از نقطه‌ی O، ۲ سانتی‌متر باشد. اگر این نقطه‌ها را بیشتر و بیشتر کنیم چه شکلی ایجاد می‌شود؟

۲ــ دو خط متمایز در صفحه یا موازی‌اند یا متقاطع. سه وضعیت مختلف یک خط و یک دایره را رسم کنید و در هر حالت مشخص کنید خط و دایره چند نقطه‌ی مشترک دارند.

۳ــ فاصله‌ی یک نقطه از یک خط، طول کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که آن نقطه را به خط وصل می‌کند. خط d بر دایره‌ی c به مرکز O و شعاع r مماس است. کدام پاره‌خط فاصله‌ی مرکز دایره از خط d را نشان می‌دهد؟ اندازه‌ی آن را با r مقایسه کنید.

۴ــ در هر شکل فاصله‌ی مرکز دایره از خط d را OH بنامید و بدون اندازه‌گیری، رابطه‌ها را با >، = یا < کامل کنید: r __ OH

۱) همه‌ی این نقطه‌ها روی یک **دایره** به مرکز O و شعاع ۲ سانتی‌متر قرار می‌گیرند؛ هرچه نقطه‌ها بیشتر شوند شکل به دایره‌ی کامل نزدیک‌تر می‌شود.

۲) سه وضعیت: خط دایره را در ۲ نقطه قطع کند (قاطع)، در ۱ نقطه (مماس) یا هیچ نقطه‌ی مشترکی نداشته باشد (خارج دایره).

۳) پاره‌خط عمودی که مرکز O را به نقطه‌ی تماس وصل می‌کند (OH) فاصله‌ی مرکز از خط است؛ این پاره‌خط خود شعاع دایره است، پس r = OH.

وضعیت خط و دایره	تعداد نقاط مشترک	OH و r رابطه‌ی
خط قاطع دایره	۲	r > OH
خط مماس بر دایره	۱	r = OH
خط خارج دایره	۰	r < OH

نتیجه: وقتی خط و دایره تنها یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند می‌گوییم خط بر دایره مماس است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۲ صفحه ۱۳۹ کار در کلاس

۱ــ در هر شکل کدام پاره‌خط بر دایره مماس است؟

۲ــ در هر شکل خط بر دایره مماس است. زاویه‌ی Q1 چه نوع زاویه‌ای است؟

۳ــ در هر شکل PQ بر دایره مماس است. اندازه‌ی زاویه‌ی خواسته‌شده را پیدا کنید (زاویه‌ی داده‌شده‌ی ۲۳°، ۴۷° و ۶۳°).

۱) پاره‌خطی مماس است که فقط یک نقطه‌ی مشترک با دایره دارد و بر شعاع نقطه‌ی تماس عمود است.

۲) زاویه‌ی Q1 بین شعاع و مماس است؛ **قائمه (۹۰°)** است، چون شعاع در نقطه‌ی تماس بر مماس عمود است.

۳) مثلث OQP در Q قائم است ($Q = 90^\circ$) و مجموع زاویه‌های مثلث ۱۸۰° است؛ پس زاویه‌ی مجهول $x = 90^\circ$ (زاویه‌ی داده‌شده) :- $67^\circ = 23 - 90$، $43^\circ = 47 - 90$، $27^\circ = 63 - 90$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳ صفحه ۱۳۹ فعالیت

۱ــ روی کاغذ دایره‌ای رسم و آن را جدا کنید. دو نقطه‌ی A و B را روی دایره بگیرید و به هم وصل کنید (وتر). دایره را طوری تا کنید که A و B روی هم بیفتند، تا را باز کنید و خط تا را پررنگ کنید. در هندسه به این پاره‌خط چه می‌گویند؟ روی دایره وتر دیگری رسم کنید و همین مراحل را تکرار کنید. دو پاره‌خط رسم‌شده یکدیگر را در چه نقطه‌ای قطع می‌کنند؟

خط تا بر وتر عمود است و آن را نصف می‌کند؛ پس **عمودمنصف وتر** است. عمودمنصف دو وتر یکدیگر را در **مرکز دایره** (O) قطع می‌کنند، چون مرکز دایره از دو سر هر وتر به یک فاصله است (دو شعاع).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴ صفحه ۱۴۰ فعالیت

۲ــ نتیجه‌ی فعالیت (۱) را به کمک شکل توضیح دهید.

۳ــ قطعه‌ای از یک بشقاب قدیمی پیدا شده است. با توجه به فعالیت‌های قبل توضیح دهید چگونه می‌توانیم اندازه‌ی قطر این بشقاب را مشخص کنیم.

۴ــ دایره‌ای به مرکز O با وتر AB داریم. دو متن را بخوانید و نتیجه‌ی هر یک را کامل کنید. «خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می‌شود، آن وتر را ــ و برعکس، پاره‌خطی که مرکز دایره را به وسط وتر وصل می‌کند، ــ».

۲) نقطه‌ی O از A و B به یک فاصله است ($OA = OB$ شعاع‌اند)؛ پس روی عمودمنصف AB قرار دارد. بنابراین عمودمنصف هر وتر از مرکز دایره می‌گذرد.

۳) روی لبه‌ی قطعه دو وتر دلخواه رسم می‌کنیم و عمودمنصف هر کدام را می‌کشیم. محل برخورد دو عمودمنصف مرکز بشقاب است. فاصله‌ی مرکز تا لبه را اندازه می‌گیریم تا شعاع r به دست آید و قطر 2r = است.

۴) متن اول (با عمود کردن OH بر AB): مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AOH و BOH در حالت وتر و یک ضلع همنهشت‌اند (OA = OB و OH مشترک)، پس AH = BH؛ **خطی که از مرکز بر وتر عمود می‌شود آن را نصف می‌کند.**

متن دوم (با وصل O به وسط وتر M): مثلث‌های AOM و BOM در حالت سه ضلع همنهشت‌اند، پس زاویه‌های M1 = M2 و چون مجموعشان ۱۸۰° است هر کدام ۹۰° است؛ **پاره‌خطی که مرکز دایره را به وسط وتر وصل می‌کند بر آن وتر عمود است.**

تفاوت دو متن: در متن اول عمود بودن مفروض است و نصف شدن نتیجه می‌شود و در متن دوم نصف شدن مفروض است و عمود بودن نتیجه می‌شود (عکس یکدیگرند).

۵ صفحه ۱۴۱ **کار در کلاس**

۱ــ در هر شکل RQ بر دایره مماس است؛ زاویه‌ی مجهول را پیدا کنید (شکل‌های الف و ب با زاویه‌های ۲۷°، ۶۹°، ۲۹° و ۳۵°).

۲ــ در هر شکل SR بر دایره مماس است. مقدار a را به دست آورید.

۱) چون شعاع OQ بر مماس RQ عمود است، مثلث ORQ در Q قائم است؛ زاویه‌های دیگر مثلث با هم ۹۰° می‌شوند. زاویه‌ی مجهول زاویه‌ی داده‌شده − 90° = (یا با رابطه‌ی زاویه‌ی مرکزی و کمان). چون زاویه‌ها در شکل مشخص نیستند عدد نهایی گزارش نشد.

۲) مثلث ORS در S قائم است؛ با فیثاغورس: اگر وتر ۱۵ و یک ضلع قائمه ۱۲ باشد، a = √(15^2 − 12^2) = √81 = 9. برای شکل دیگر (۸ و ۳): شعاع + بخش خارجی = OR و شعاع^2 − OR^2 = a^2.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۶ صفحه ۱۴۱ تمرین

۱ــ نقطه‌ی B در فاصله‌ی ۱۳ سانتی‌متری مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر قرار دارد. از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کرده‌ایم. فاصله‌ی B از هر یک از نقاط تماس را به دست آورید.

۲ــ از نقطه‌ی O′ خارج دایره‌ای به مرکز O دو مماس بر دایره رسم کنید و نقاط تماس را A و B بنامید. شکل بکشید و دلیل هر مورد را بنویسید: الف) چرا O′A = O′B؟ ب) چرا OO′ نیمساز زاویه‌ی O′ است؟

۳ــ در کاسه‌ای کروی مقداری آب ریخته‌ایم و AB برابر ۲۴ سانتی‌متر شده است. حداکثر عمق آب چقدر است؟ (اندازه‌های ۱۲ و ۲۰ سانتی‌متر روی شکل)

۱) مثلث OAB در نقطه‌ی تماس قائم است (شعاع بر مماس عمود). با فیثاغورس: طول مماس = √(13^2 − 5^2) = √(169 − 25) = √144 = 12 سانتی‌متر؛ هر دو نقطه‌ی تماس ۱۲ سانتی‌متر فاصله دارند.

۲) الف) مثلث‌های OAO′ و OBO′ قائم‌الزاویه‌اند (شعاع بر مماس عمود)، OA = OB (شعاع) و وتر OO′ مشترک است؛ پس در حالت وتر و یک ضلع همنهشت‌اند و O′A = O′B. ب) از همنهشتی همان دو مثلث، زاویه‌های AO′O و BO′O مساوی‌اند؛ پس OO′ نیمساز زاویه‌ی O′ است.

۳) اگر شعاع کره ۲۰ و نصف وتر ۱۲ باشد: فاصله‌ی مرکز از سطح آب √(20^2 − 12^2) = √256 = 16 و عمق آب 20 − 16 = 4 سانتی‌متر (اگر مرکز بالای سطح آب باشد). اگر مرکز زیر سطح باشد عمق 20 + 16 = 36 می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷ صفحه ۱۴۲ فعالیت

۱ــ ساعت‌ها چه زمانی را نشان می‌دهند؟ پنج دقیقه بعد هر ساعت چه زمانی را نشان می‌دهد؟ در این مدت عقربه‌ی دقیقه‌شمار چند درجه حرکت کرده است؟ نوک کدام عقربه مسیر طولانی‌تری طی کرده است؟

۲ــ الف) دو نقطه‌ی A و B دایره را به دو کمان تقسیم کرده‌اند. آیا ممکن است دو نقطه دایره را به دو کمان مساوی تقسیم کنند؟ ب) مرکز را به دو سر کمان وصل کنید؛ زاویه‌ی AOB زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمان AB است.

۳ــ دایره به شش قسمت مساوی تقسیم شده است. زاویه‌ی O1 چه کسری از ۳۶۰ درجه است؟ کمان روبه‌رو به O1 چه کسری از دایره‌ی c1 و c2 است؟ آیا این دو کسر مساوی‌اند؟ آیا طول دو کمان مساوی است؟

۴ــ چرا اندازه‌ی کمان روبه‌رو به O1 در هر دو دایره ۶۰ درجه است؟

۵ــ در شکل زاویه‌ی xOy برابر ۳۶ درجه است. کمان AB چند درجه است؟ از تساوی محیط / AB طول کمان AB / 360° دایره = اندازه‌ی کمان کمک بگیرید.

۱) در ۵ دقیقه عقربه‌ی دقیقه‌شمار 1/12 = 5/60 دایره، یعنی 30° = 12 ÷ 360، می‌چرخد. نوک عقربه‌ی ساعت بزرگ‌تر (عقربه‌ی بلندتر) مسیر طولانی‌تری می‌پیماید، چون شعاع بزرگ‌تری دارد.

۲) الف) بله؛ وقتی A و B دو سر یک قطر باشند دایره به دو نیم‌دایره‌ی ۱۸۰° تقسیم می‌شود.

۳) از 360 1/6 = 60° = 360/6 = O1؛ کمان روبه‌رو به آن در هر دو دایره 1/6 دایره است؛ دو کسر مساوی‌اند ولی طول کمان‌ها برابر نیست، چون شعاع دو دایره فرق دارد (کمان دایره‌ی بزرگ‌تر بلندتر است).

۴) اندازه‌ی کمان با زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به آن برابر است؛ زاویه‌ی 60° = O1 پس هر دو کمان ۶۰° هستند.

۵) اندازه‌ی کمان AB با زاویه‌ی مرکزی برابر است: 36°، یعنی 1/10 = 36/360 دایره و طول کمان = 1/10 محیط.

۸ صفحه ۱۴۳ کار در کلاس

۱ــ هر دایره به دو کمان تقسیم شده است؛ اندازه‌ی هر کمان را بنویسید.

۲ــ اندازه‌ی کمان و زاویه‌های مجهول را پیدا کنید (دو شکل: ۲۹۰° ، x و y و دیگری ۵۰°).

۳ــ در شکل AB قطر دایره است. زاویه‌ی B چند درجه است؟

۱ و ۲) قاعده: اندازه‌ی هر کمان با زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو برابر است و دو کمانی که یک دایره را می‌سازند با هم ۳۶۰° می‌شوند؛ مثلاً اگر یک کمان 290° باشد، کمان دیگر 70° = 290 – 360 است.

۳) چون AB قطر است، کمان AB برابر ۱۸۰° است. زاویه‌ی B (با توجه به زاویه‌ی ۵۰° و مثلث متساوی‌الساقین OBC) را از رابطه‌ی مجموع زاویه‌های مثلث° = 180 به دست می‌آوریم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹ صفحه ۱۴۳ فعالیت

۱ــ محیط دایره را به هشت کمان مساوی تقسیم کرده‌ایم. می‌خواهیم بدانیم چرا هشت‌ضلعی ABCDEFGH منتظم است. رضا می‌گوید: «مثلث‌های AOB، BOC، ... متساوی‌الساقین‌اند. چرا؟ ... پس همه‌ی زاویه‌های سبز رنگ با هم برابرند. چرا؟ ... پس همه‌ی زاویه‌های هشت‌ضلعی با هم برابرند. چرا؟» آرش می‌گوید این تنها برابری زاویه‌ها را نشان می‌دهد و برای ضلع‌ها هم دلیل می‌خواهد. بعد ادامه می‌دهد: «مثلث‌های AOB، BOC، ... همنهشت‌اند؛ در چه حالتی؟ پس ... = AB = BC = CD». توضیحات لازم را اضافه کنید تا دلیل منتظم بودن کامل شود.

۲ــ برای هر مورد دلیل بیاورید. الف) فرض کنید کمان AB = کمان CD؛ چرا وتر AB = وتر CD؟ ب) فرض کنید وتر AB = وتر CD؛ چرا کمان AB = کمان CD؟ نتیجه‌ی فعالیت را در دو جمله بنویسید.

۱) ... = OC = OB = OA (شعاع‌ها)، پس مثلث‌های AOB، BOC، ... متساوی‌الساقین‌اند. هر کمان = 360 ÷ 8 = 45° است، پس زاویه‌ی رأس هر مثلث 45° و هر زاویه‌ی قاعده 67.5° = 2/(45 – 180) است؛ پس همه‌ی زاویه‌های سبز برابرند. هر زاویه‌ی هشت‌ضلعی از دو زاویه‌ی قاعده‌ی مجاور ساخته می‌شود: = 67.5 + 67.5 = 135°؛ پس همه‌ی زاویه‌های هشت‌ضلعی برابرند.

مثلث‌ها در حالت **ض‌زض** (دو ضلع شعاع و زاویه‌ی بین آنها ۴۵°) همنهشت‌اند؛ پس ... = AB = BC = CD و ضلع‌های هشت‌ضلعی مساوی‌اند. چون هم زاویه‌ها و هم ضلع‌ها مساوی‌اند، هشت‌ضلعی منتظم است.

۲) الف) کمان‌های مساوی زاویه‌های مرکزی مساوی دارند؛ مثلث‌های AOB و COD دو ضلع مساوی (شعاع) و زاویه‌ی بین مساوی دارند، پس همنهشت‌اند و AB = CD. ب) اگر AB = CD، دو مثلث در حالت سه ضلع همنهشت‌اند و زاویه‌های مرکزی برابرند، پس کمان‌ها مساوی‌اند.

نتیجه: اگر در یک دایره اندازه‌ی دو کمان برابر باشد، وترهای متناظرشان برابرند؛ و برعکس، اگر دو وتر برابر باشند، کمان‌های متناظرشان برابرند.

۱۰ صفحه ۱۴۴ **کار در کلاس**

۱ــ با خط‌کش و نقاله در دایره‌ی روبه‌رو یک پنج‌ضلعی منتظم رسم کنید.

۲ــ دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی شعاع دایره باز کنید و از یک نقطه‌ی دایره شروع کنید و پی‌درپی کمان بزنید.

الف) دایره به چند کمان تقسیم می‌شود؟ ب) چرا این کمان‌ها مساوی‌اند؟ ج) هر کمان چند درجه است؟ د) چند کمان ۱۲۰ درجه در شکل دیده می‌شود؟

۱) زاویه‌ی مرکزی هر ضلع $360 \div 5 = 72^\circ$ است. با نقاله از شعاع OA به اندازه‌ی ۷۲°، ۱۴۴°، ۲۱۶° و ۲۸۸° شعاع می‌کشیم و نقطه‌های برخورد با دایره را به هم وصل می‌کنیم.

۲) الف) ۶ کمان. ب) هر وتر برابر شعاع است (AB = OA = OB)، پس مثلث AOB متساوی‌الاضلاع است و وترها مساوی‌اند؛ کمان‌های متناظر وترهای مساوی با هم برابرند. ج) هر کمان 60° است. د) هر دو کمان متوالی ۱۲۰° می‌شوند؛ در این شکل ۶ کمان ۱۲۰° (هر دو کمان مجاور) وجود دارد (اگر کمان‌های جدا از هم را بشماریم ۳ تا).

شکل حاصل یک شش‌ضلعی منتظم است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۱۱ صفحه ۱۴۵ تمرین

۱ــ OD نیمساز زاویه‌ی مرکزی AOB است و $AOD = 36^\circ$. اندازه‌ی هر یک از کمان‌های AD و BD چند درجه است؟

۲ــ کمان AB برابر x درجه است. اندازه‌ی زاویه‌ی AOB و زاویه‌ی ACB را برحسب x به دست آورید.

۳ــ متحرکی از نقطه‌ی A روی دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر حرکت می‌کند. جدول را کامل کنید (کسر طی‌شده، اندازه‌ی کمان و طول تقریبی؛ محیط 2π =).

۴ــ قطرهای AB و CD بر هم عمودند. الف) چرا کمان‌های AC، CB، BD و DA مساوی‌اند؟ ب) آیا وترهای AC، CB، BD و DA مساوی‌اند؟ ج) آیا زاویه‌های چهارضلعی ADBC مساوی‌اند؟ چرا؟

۵ــ در شکل وترهای AB و CD بر هم عمودند. الف) آیا کمان‌های AC، CB، BD و DA مساوی‌اند؟ ب) پاسخ را با تمرین قبل مقایسه کنید.

---

۱) زاویه‌ی $AOD = 36^\circ$ پس کمان $AD = 36^\circ$؛ چون OD نیمساز است، $BOD = 36^\circ$ و کمان $BD = 36^\circ$. (کمان AB $= 72^\circ$)

۲) زاویه‌ی مرکزی $AOB = x$ (برابر کمان) و زاویه‌ی محاطی $ACB = x/2$ (نصف کمان روبه‌رو).

کسر طی‌شده از دایره	اندازه‌ی کمان	طول تقریبی کمان
۱/۲	180°	$\pi \approx 3.14$ cm
۱/۴	90°	$2\pi/4 = \pi/2 \approx 1.57$ cm
۱/۳	120°	$2\pi/3 \approx 2.09$ cm

۴) الف) چهار زاویه‌ی مرکزی AOC، COB، BOD، DOA هر کدام 90° است (قطرها عمودند)، پس کمان‌ها مساوی‌اند (90°). ب) بله؛ کمان‌های مساوی وترهای مساوی دارند. ج) بله؛ ADBC چهار ضلع مساوی و قطرهای مساوی (قطر دایره) دارد، پس مربع است و زاویه‌هایش 90° است (هر زاویه روبه‌رو به نیم‌دایره، 90° است).

۵) الف) نه؛ وقتی وترها از مرکز نمی‌گذرند، بر هم عمودند ولی کمان‌ها لزوماً مساوی نیستند. ب) تفاوت: در تمرین قبل AB و CD قطر بودند (زاویه‌های مرکزی 90°) ولی در اینجا وتر عمودی دلخواه است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

توشه ای برای موفقیت

۱۲ صفحه ۱۴۶ فعالیت

۱ــ مانند نمونه‌ی الف، در شکل‌ها وضعیت‌های مختلف یک زاویه و دایره را رسم کنید: الف) رأس روی دایره ب) رأس خارج دایره ج) رأس در مرکز د) رأس داخل دایره (غیر مرکز). در کدام وضعیت زاویه‌ی مرکزی است؟

۲ــ زاویه‌ی مرکزی BOC را برحسب کمان BC بنویسید. چرا زاویه‌های A و C در مثلث AOC برابرند؟ چه ارتباطی میان زاویه‌ی BOC و این دو زاویه وجود دارد؟ زاویه‌ی محاطی BAC را برحسب کمان BC بنویسید.

۳ــ DAC = DAB + BAC را برحسب DC بنویسید.

۴ــ EAC = BAC − ... را برحسب EC بنویسید.

۵ــ پاسخ فعالیت‌های ۲، ۳ و ۴ را مقایسه کنید. عبارت را کامل کنید: «اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر است با ...».

۱) در حالت (ج) (رأس در مرکز) زاویه‌ی مرکزی است. در حالت (الف) که رأس روی دایره است و ضلع‌ها دایره را قطع کرده‌اند، زاویه‌ی **محاطی** است.

۲) BOC = BC (زاویه‌ی مرکزی با کمان برابر است). در مثلث AOC، OA = OC (شعاع) و زاویه‌های A و C برابرند. زاویه‌ی BOC زاویه‌ی خارجی مثلث است و BOC = A + C = 2A؛ پس BAC = BOC/2 = BC/2.

۳) DAC = DAB + BAC = DB/2 + BC/2 = (DB + BC)/2 = DC/2.

۴) EAC = BAC − BAE = BC/2 − BE/2 = (BC − BE)/2 = EC/2.

۵) هر سه حالت (مرکز داخل زاویه، مرکز روی یک ضلع، مرکز خارج زاویه) بررسی شده‌اند و نتیجه یکی است: **اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر است با نصف اندازه‌ی کمان روبه‌رو به آن.**

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳ صفحه ۱۴۷ کار در کلاس

۱ــ با توجه به شکل: الف) زاویه‌های محاطی مقابل به کمان AE را پیدا کنید. ب) دو زاویه‌ی محاطی دیگر رسم کنید که AE کمان مقابل به آنها نیز باشد.

۲ــ در شکل اندازه‌ی زاویه‌ی C را تعیین کنید (زاویه‌ی مرکزی ۸۰°). دو دانش‌آموز (زهرا و فاطمه) جواب داده‌اند؛ راه‌حل‌های آنها را توضیح دهید.

۱) زاویه‌هایی که رأسشان روی دایره است و ضلع‌هایشان به دو سر کمان AE می‌رسد (مثل B، C و D روی کمان مقابل) محاطی مقابل به AE هستند. همه‌ی آنها برابر نصف کمان AE هستند؛ هر نقطه‌ی دیگری روی کمان بزرگ‌تر یک زاویه‌ی محاطی مساوی می‌سازد.

۲) زهرا: زاویه‌ی مرکزی AOD = 80°، پس کمان AD = 80° و زاویه‌ی محاطی C = 80/2 = 40°.

فاطمه: زاویه‌ی $AOC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$؛ در مثلث متساوی‌الساقین AOC مجموع دو زاویه‌ی قاعده $180 - 100 = 80^\circ$ و هر یک $80/2 = 40^\circ$ است. هر دو روش به $C = 40^\circ$ می‌رسند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴ صفحه ۱۴۷ فعالیت

۱ــ یک زاویه‌ی محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید. سه زاویه‌ی محاطی دیگر مقابل به همین کمان رسم کنید. فکر می‌کنید چند زاویه‌ی دیگر می‌توان رسم کرد؟ چرا؟ آیا همه‌ی این زاویه‌ها با هم برابرند؟ چرا؟

۲ــ قطر AB دایره را به دو کمان تقسیم کرده است. اندازه‌ی هر کمان چند درجه است؟ چند زاویه‌ی محاطی مقابل به کمان AB می‌توان رسم کرد؟ اندازه‌ی این زاویه‌های محاطی مقابل قطر چند درجه است؟ چرا؟

۱) بی‌شمار زاویه‌ی محاطی می‌توان رسم کرد (رأس می‌تواند هر نقطه‌ی کمان بزرگ‌تر باشد). همه‌ی آنها برابرند، چون هر کدام نصف کمان AB است.

۲) هر کمان 180° (نیم‌دایره) است. بی‌شمار زاویه‌ی محاطی می‌توان رسم کرد و هر کدام $180/2 = 90^\circ$ است؛ یعنی هر زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر **قائمه** است.

۱۵ صفحه ۱۴۸ کار در کلاس

۱ــ اندازه‌ی زاویه‌ها و کمان‌های خواسته‌شده را پیدا کنید.

۲ــ رأس‌های یک لوزی به ضلع ۵ سانتی‌متر روی دایره قرار دارد. چرا این لوزی مربع است؟ قطر دایره چند سانتی‌متر است؟

۱) برای هر زاویه‌ی محاطی: نصف کمان روبه‌رو؛ برای هر کمان: دو برابر زاویه‌ی محاطی مقابل یا برابر زاویه‌ی مرکزی. چون شکل‌ها مشخص نیستند عدد گزارش نمی‌شود.

۲) در لوزی زاویه‌های روبه‌رو برابرند و در چهارضلعی محاط در دایره مجموع هر دو زاویه‌ی روبه‌رو 180° است (محاطی‌ها نصف کمان‌های مکمل‌اند)؛ پس هر زاویه 90° است و لوزی با زاویه‌ی قائمه مربع است. قطر مربع قطر دایره است: $5\sqrt{2} \approx 7.07$ سانتی‌متر.

(چون هر زاویه‌ی 90° روبه‌رو به نیم‌دایره است، قطر مربع قطر دایره می‌شود.)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۶ صفحه ۱۴۸ تمرین

۱ــ اندازه‌ی زاویه‌ها و کمان‌های مجهول را پیدا کنید (شکل‌هایی با ۴۰°، ۱۳۰°، ۴۲°، ۳۳°، ۵۷° و ...).

۲ــ در شکل زاویه‌ی AOB برابر ۷۲ درجه است. کمان AB چند درجه است؟ اگر دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی AB باز کنیم و با شروع از B پی‌درپی کمان بزنیم، چند کمان مساوی روی دایره جدا می‌شود؟

۱) قاعده‌ها: زاویه‌ی مرکزی = کمان، زاویه‌ی محاطی = نصف کمان، °مجموع کمان‌های دایره = 360؛ زاویه‌ی روبه‌رو به قطر °90 است. چون شکل‌ها مشخص نیست، مقدار نهایی نوشته نشد.

۲) کمان °AB = 72. تعداد کمان‌های مساوی 5 = 72 ÷ 360 است (یک پنج‌ضلعی منتظم).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷ صفحه ۱۴۹ تمرین

۳ــ دایره به هشت قسمت مساوی تقسیم شده است. الف) شکل چند خط تقارن دارد؟ ب) اندازه‌ی دو زاویه‌ی مشخص‌شده را پیدا کنید.

۴ــ دایره‌ای بکشید و چهارضلعی ABCD را طوری رسم کنید که هر چهار رأس آن روی دایره باشد. چرا مجموع دو زاویه‌ی روبه‌رو به هم در چهارضلعی ABCD برابر ۱۸۰ درجه است؟

۵ــ کمان AB برابر x درجه است. الف) زاویه‌ی O1 را برحسب x بنویسید. ب) کمان قرمزرنگ را برحسب x بنویسید. ج) زاویه‌ی C را برحسب x بنویسید.

۶ــ پره‌ها دوازده کمان مساوی روی محیط چرخی به شعاع ۳۰ سانتی‌متر ایجاد کرده‌اند. الف) طول TX چقدر است؟ ب) مثلث ZRT چه نوع مثلثی است؟ چرا؟ ج) طول ZT چقدر است؟ د) مثلث XTZ چه نوع مثلثی است؟ چرا؟ هـ) طول ZX چقدر است؟

۳) الف) ۸ خط تقارن (۴ خط از رأس‌های مقابل و ۴ خط از وسط ضلع‌های مقابل). هر کمان °45 = 8 ÷ 360 است؛ اگر زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به یک کمان باشد °22.5 و اگر روبه‌رو به دو کمان °45 است.

۴) زاویه‌های روبه‌روی A و C به ترتیب نصف کمان‌های BCD و BAD هستند و مجموع این دو کمان کل دایره، یعنی °360 است؛ پس °A + C = 360/2 = 180. همین طور °B + D = 180.

۵) الف) O1 = x (زاویه‌ی مرکزی برابر کمان). ب) کمان قرمز 360 − x است. ج) زاویه‌ی C محاطی روبه‌رو به کمان AB است: x/2.

۶) هر کمان °30 = 12 ÷ 360. فرض: T و X چهار کمان از هم فاصله دارند، یعنی کمان °TX = 120 و TX = 2 × 30 × sin 60° = 30√3 ≈ 51.96 سانتی‌متر. اگر Z و T دو سر یک قطر باشند، ZT = 60 سانتی‌متر و مثلث XTZ چون زاویه‌ی روبه‌رو به قطر °۹۰ است قائم‌الزاویه است و ZX = √(60^2 − (30√3)^2) = 30. مثلث ZRT با دو ضلع شعاع متساوی‌الساقین است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۸ صفحه ۱۵۰ تمرین ترکیبی

۱ــ با توجه به شکل، اندازه‌ی زاویه‌ها و کمان‌های زیر را بنویسید: ? = ∠C، ? = ∠COB، ? = BC کمان (زاویه‌ی ۳۰°).

۲ــ کاغذی مربعی‌شکل به قطر ۲۴ سانتی‌متر داریم. بزرگ‌ترین دایره‌ای را که می‌توان روی آن رسم کرد رسم کرده‌ایم. قطر این دایره را حساب کنید.

۳ــ الف) ضلع‌های روبه‌رو در چهارضلعی داخل دایره برابرند. چرا چهارضلعی مستطیل است؟ ب) شعاع دایره ۵ و عرض مستطیل ۱۹ سانتی‌متر است. طول مستطیل را به دست آورید.

۱) اگر زاویه‌ی ۳۰° محاطی روبه‌رو به کمان BC باشد، BC = 2 × 30 = 60° و COB = BC = 60°؛ اگر همان ۳۰° زاویه‌ی C باشد، کمان روبه‌رو 60° است. دقیق بودن به شکل بستگی دارد.

۲) قطر مربع ۲۴ و ضلعش 24/√2 = 12√2 ≈ 16.97 سانتی‌متر است. بزرگ‌ترین دایره‌ی داخل مربع به ضلع مربع مماس است؛ پس قطر آن 12√2 ≈ 16.97 سانتی‌متر است.

۳) الف) چهارضلعی با ضلع‌های روبه‌رو برابر متوازی‌الاضلاع است؛ زاویه‌های روبه‌رو برابرند و چون چهارضلعی محاطی است مجموع هر دو زاویه‌ی روبه‌رو 180° است؛ پس هر زاویه 90° و چهارضلعی مستطیل است. ب) قطر مستطیل قطر دایره است (2r)؛ (عرض^2 − 2^(2r))√ = طول. با اعداد متن (2r = 10 و عرض 19) جواب حقیقی نمی‌شود (عرض از قطر بزرگ‌تر است)؛ احتمالاً عدد ۱۹ در متن اشتباه خوانده شده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir
ایران‌توشه
توشه‌ای برای موفقیت